Université Claude Bernard – Lyon 1
Année universitaire 2014-2015

Techniques Mathématiques de Base
Licence 1 (PCSI)

Feuille 2 : Continuité, limite, fonction réciproque

Exercice 1 *Donner l'allure des fonctions suivantes :*

(a) $f_1(x) = x^2 + 1$
(b) $f_2(x) = \sqrt{x+2}$
(c) $f_3(x) = \frac{1}{x+2}$
(d) $f_4(x) = e^{x-1}$
(e) $f_5(x) = \ln(x+3)$
(f) $f_6(x) = \ln|x+3|$
(g) $f_7(x) = 2\cos(x)$
(h) $f_8(x) = \sin(3x)$
(i) $f_9(x) = \tan(x)$

Exercice 2 *Préciser le domaine de définition des fonctions suivantes :*

(a) $f_1(x) = \sqrt{x+1}$
(b) $f_2(x) = \sqrt{|x+1|}$
(c) $f_3(x) = \sqrt{x^2 - 16x + 55}$
(d) $f_4(x) = \sqrt{(x+1)(2-x)}$
(e) $f_5(x) = \frac{1}{x-3}$
(f) $f_6(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$
(g) $f_7(x) = \ln(x^2 - 1)$
(h) $f_8(x) = \ln(\sqrt{x})$
(i) $f_9(x) = \sqrt{\frac{1}{x-3}}$
(j) $f_{10}(x) = \sin(2\pi x + \frac{\pi}{3})$
(k) $f_{11}(x) = \frac{1}{\cos(x)}$
(l) $f_{12}(x) = \frac{1}{\tan(x)}$

Ces fonctions sont-elles continues sur leur domaine de définition ?

Exercice 3 *Montrer l'inégalité* $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ *dans* $\mathbb{R}$

Exercice 4 *Résoudre graphiquement et par le calcul les équations et inéquation suivantes dans* $\mathbb{R}$

(a) $|x+3| = |2x-5|$
(b) $x + 3 = \sqrt{5-2x}$
(c) $\sqrt{x^2+x-2} > 1 + \frac{x}{2}$

Exercice 5 *Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, trouver la fonction réciproque et donner son domaine de définition :*

(a) $f_1(x) = \sqrt{2x+3}$
(b) $f_2(x) = \frac{1}{x+1}$
(c) $f_3(x) = x^4 - 1$
(d) $f_4(x) = 2\ln(1+x)$
(e) $f_5(x) = \frac{1}{e^x+3}$
(f) $f_6(x) = \sqrt{\ln(e^x - 1)}$

Exercice 6 *Trouver les limites des fonctions suivantes :*

(a) $f_1(x) = x^5 + 3x^2 + 5x - 3$ *lorsque* $x \to +\infty$ *et* $x \to 0$
(b) $f_2(x) = \frac{x^5+3x^2+5x-3}{x^4+4x-1}$ *lorsque* $x \to +\infty$ *et* $x \to 0$
(c) $f_3(x) = \frac{x^4+3x^2+5x}{x^5+4x}$ *lorsque* $x \to +\infty$ *et lorsque* $x \to 0$
(d) $f_4(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x+5}$ *lorsque* $x \to +\infty$ *et* $x \to -\infty$

Exercice 7 *Étudier l'existence de la limite des fonctions suivantes*

(a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}$ *lorsque* $x \to 0$.
(b) $g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}$ *lorsque* $x \to 1$.

Exercice 8 *Donner l'équivalent en $x = +\infty$ des fonctions suivantes*

(a) $f_1(x) = x^3 + 4x + 7$ (b) $f_2(x) = \frac{2x^3-4x^2+7x-6}{x^2-4}$ (c) $f_3(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{2x-1}$

Exercice 9 *Donner l'équivalent en $x = 0$ des fonctions suivantes*

(a) $f_1(x) = x^2 + 6x$ (b) $f_2(x) = \frac{x^5+2x^3+11x-4}{x^4+4}$ (c) $f_3(x) = \frac{1+x}{1-x} - 1$

Exercice 10 *Montrer que* $\frac{\sqrt{x^3+4x^2}}{x+2} \underset{x\to 0}{\sim} |x|$

Exercice 11

1. *La fonction $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = 2x - 1 \text{ si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

est-elle continue sur l'intervalle $[0,2]$?

2. *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\begin{cases} f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

3. *La fonction $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin(\pi/x) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

est-elle continue sur $[-2,2]$?